## Общие сведения о взаимосвязи теории информации, теории алгоритмов и теории автоматов



Техническая кибернетика – наука об управлении сложными динамическими системами, которая рассматривает вопросы разработки и конструирования автоматов (вычислительной техники), технических средств сбора, хранения, приема, передачи информации, а также ее преобразования.

Теория информации – раздел прикладной математики и информатики, где решаются исследовательские задачи, связанные с процессами сбора, обработки, хранения и передачи информации.

Информация принимается и передается по каналу связи в виде сообщений, которые имеют определенную форму представления и обладают признаками начала и конца сообщения, и в зависимости от содержания информации или ее неоднозначности возникает необходимость ее преобразования в удобную для передачи форму.

В качестве преобразователей применяются кодирующие и декодирующие устройства.

Основные понятия: алфавит, конечный алфавит, символ, слово, буква.

Пустая цепочка – цепочка, не содержащая ни одного символа (ε). Ее можно рассматривать, как цепочку в любом алфавите.

Теория алгоритмов – раздел математики, который изучает общие свойства алгоритма.

Взаимосвязь ТА и ТИ заключается в том, что ТА формирует основу для разработки алгоритмических языков, обосновывает принципы выработки эффективных алгоритмов программирования и дальнейших решений задач на компьютерах.

Эффективный алгоритм – алгоритм, который состоит из наименьшего количества операций.

Большое влияние на развитие теории автоматов оказали:

1. Логическая теория
2. Теория релейно–контактных схем, состоящая из 2 направлений:
   1. Теория логических комбинационных схем (автоматы с 1 состоянием)
   2. Теория дискретных автоматов

Логические выражения могут быть простыми и сложными. Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логические операции.

Сложное логическое выражение состоит из высказываний, объединенных логическими операциями (не, или, и, и т.д.)

Одноместные логические операции – операции с 1 высказывание.

Двуместные логические операции (логическое сложение/умножение).

Теория релейно–контактных схем – относится к структурной теории автоматов, в которой изучаются вопросы анализа, синтеза и преобразования электрических схем, построенных из контактных реле или других переключателей, которые могут находится только в 1 из 2 состояний – замкнутом или разомкнутым. Контакты реле находятся в замкнутом состоянии, когда реле под напряжением и через его обводку проходит электрический ток. Замкнутому состоянию соответствует значение логической единицы. И наоборот.

Доказано однозначное соответственное между функциями алгебры логики и последовательно–параллельными контактными схемами, а также сформулированы условия функционирования релейно–контактной схемы.

Пусть переменная xi соответствует замыкающему контакту, а ее инверсия размыкающему. Оператором дизъюнкции и конъюнкции будет соответствовать параллельное и последовательное соединение контактных сетей соответственно.

Таким образом преобразуя структурные формулы по законам алгебры логики можно получить новые формулы, различные по структуре, т.е. по типу и числу контактов и их соединения, но равносильные по действию.

## Комбинационные схемы

Это цифровые устройства, не обладающие памятью. Их логическое состояние однозначно определяется входными сигналами, имеющимися в данный момент времени (автоматы без памяти). Значение выходной переменной в каждый момент автоматного времени определяется значением одной переменной в тот же момент времени. Поэтому время может быть исключено из функциональной зависимости.

Функциональная зависимость между входной и выходной переменной может быть задана таблицей истинности, в которой каждому значению входной переменной ставится в соответствие значение выходной переменной. Рассмотрим случай, когда входные и выходные переменные автомата без памяти являются двоичные переменные. Пусть автомат имеет N входов, на которые поступают двоичные переменные xi, где i ∈ [1;n], m выходов с которых снимается yi при этом каждая выходная переменная является функцией двойных переменных. Автомат с двоичными входными переменными при наличии n кол-во ходов можно иметь 2n выходов, на которых реализуются различные двоичные функции от n двоичных аргументов.

yi = fj(x1,…, xi)

Способы задания автомата без памяти

1. Таблица истинности или системы уравнений
2. Система уравнений, составленная аппарата двоичных функций

Основные типы элементарных автоматов без памяти

1. Автомат, реализующий функцию константа 0 или генератор 0
2. Автомат реализующий функцию тавтологии – усилитель
3. Автомат, реализующий функцию инверсии (или инвертор или схема “НЕ”)

## Синтез автомата без памяти с 1 выходом

Синтез заключается в определении структурной схемы автомата в отношении типов и числа элементарных автоматов, входящих в состав синтезируемого. Исходные данные для синтеза:

1. Описание преобразования, которые должен совершать автомат
2. Перечень типов элементарных автоматов, которые могут быть использованы для синтеза искомого автомата.
3. Требование минимального количества элементарных автоматов того или иного типа.

Этапы синтеза автомата:

1. Переход от содержательного описания к формальному (представленного в виде таблицы)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | y |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

1. Переход от таблицы к описанию в виде формулы: это составление виде совершенной конъюнктивной нормальной формы или совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СКНФ или СДНФ) функции реализуемой на выходе автоматом.
2. Преобразование СКНФ или СДНФ в формулу требуемого вида. Формула требуемого вида представляет собой суперпозицию функций, реализуемых элементарным автоматом заданного типа при минимальном количестве функций, входящих в формулу. Как правило производится минимизация исходной формулы с последующим преобразованием, полученной минимальной дизъюнктивной нормальной формы в требуемый вид.

*Суперпозиция функций* f0, f1, …, fn называется функция f(x1...xm) = f0(g1(x1...xm),…, gk(x1...xm)), где каждая из функций gi(x1...xm) совпадает либо с 1 переменной, тогда это тождественная функция, либо с одной из 2 функций.

1. Составление структурной схемы автомата, соответствующей полученной формуле. Порядок составления структурной схемы.
   1. . Обозначение входов и выхода синтезируемого автомата и установления им в соответствие
   2. . Обозначают элементарные автоматы, которые реализуют функции, входящие в полученную на 3 этапе формулу.
   3. . Соединяют входы синтезируемого автомата, со входами элементарных автоматов и выходы ЭА со входами других ЭА. И выходом синтезируемого автомата с формулой, полученной на 3 этапе.

ДНФ (дизъюнктивно нормальная форма)– функция имеет вид дизъюнкции нескольких конъюнкций (f(x,y,z)= (x^y)v(y^!z))

СДНФ – частный случай ДНФ, в котором соблюдается 3 условия

1. В каждом слагаемом нет повторяющихся переменных
2. Нет одинаковых элементарных конъюнкций
3. Каждое слагаемое или элементарная конъюнкция, содержит все переменные, от которых зависит функция (переменная входит либо в прямой форме, либо в форме отрицания)

КНФ (конъюнктивно нормальная форма) ­– функция имеет вид конъюнкции дизъюнкций (f(x,y,z)= (xVy)^(yV!z))

СКНФ – частный случай КНФ, в котором соблюдается 3 условия

1. Нет одинаковых элементарных дизъюнкций
2. В каждой дизъюнкции нет одинаковых переменных
3. Каждое слагаемое или элементарная дизъюнкция, содержит все переменные, от которых зависит функция (переменная входит либо в прямой форме, либо в форме отрицания)

Алгоритм построения КНФ

1. С помощью равносильных формул заменить все логические операции на основные (V,^,!)
2. Если отрицание относится к выражению, то заменить его, то заменить его на отрицание каждой отдельной переменной.
3. Преобразовать двойное отрицание (если есть)
4. Если необходимо применить свойство дистрибутивности и формулы поглощения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | F(x1,x2,x3) |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1) x1=0, x2=0, x3=0 => !x1 !x2 !x3

2) x1=0, x2=0, x3=1 => !x1 !x2 x3

3) x1=0, x2=1, x3=0 => !x1 x2 !x3

4) x1=1, x2=1, x3=0 => x1 x2 !x3

F(x1, x2, x3) = (!x1 !x2 !x3) V (!x1 !x2 x3) V (!x1 x2 !x3) V (x1 x2 !x3)

Задача: синтезировать автомат без памяти с 1 выходом и 3 входами. Функция, реализуемая на выходе автомата принимает 1 значение тогда, когда единичное значение принимает 2 любых, либо все 3.

Для построения можем использовать схему “И“ на 2 входа, “ИЛИ”, “НЕ”. Схема автомата должна содержать минимальное схем “НЕ” и минимальное число элементарных автоматов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | F(x1,x2,x3) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1) x1=0, x2=1, x3=1 => !x1 x2 x3

2) x1=1, x2=0, x3=1 => x1 !x2 x3

3) x1=1, x2=1, x3=0 => x1 x2 !x3

4) x1=1, x2=1, x3=0 => x1 x2 x3

F(x1,x2,x3) = (!x1 x2 x3) V (x1 !x2 x3) V (x1 x2 !x3) V (x1 x2 x3)

Принцип минимизации СДНФ(СКНФ) – операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция склеивания производится между 2 слагаемыми, содержащими одинаковые переменные вхождения, которые совпадают со всеми переменными кроме 1. В этом случае все переменные кроме 1 можно вынести за скобки, а оставшееся в скобках прямое вхождение 1 переменной – поглотить.

F(x1,x2,x3) = (!x1 x2 x3) V (x1 !x2 x3) V (x1 x2 !x3) V (x1 x2 x3)

Склеить 1 и 4: (!x1 x2 x3) V (x1 x2 x3) = x2x3 (!x1 V x1) = x2x3

Склеить 3 и 4: (x1 x2 !x3) V (x1 x2 x3) = x1x2 (!x3 V x3) = x1x2

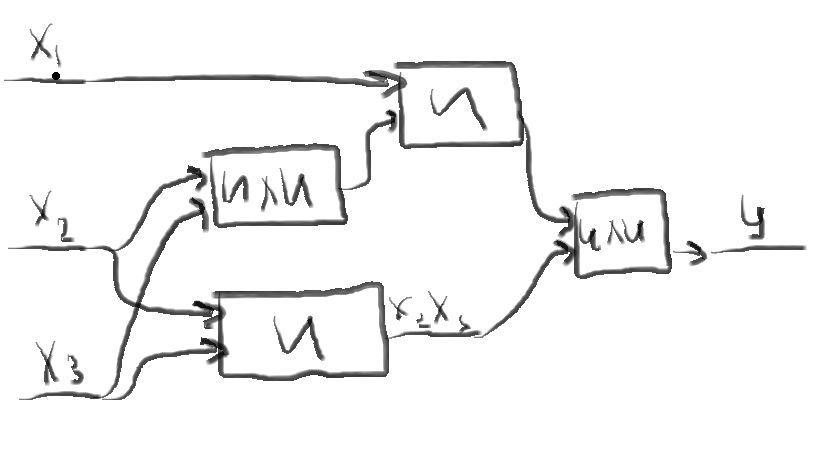
Склеить 2 и 4: (x1 !x2 x3) V (x1 x2 x3) = x1x3 (!x2 V x2) = x1x3

F(x1,x2,x3) = x2x3 V x1x2 V x1x3

F(x1,x2,x3) = x2x3 V x1 (x2 V x3) – упростили 3–членную дизъюнкцию в 2–членную дизъюнкцию.

Для реализации схемы потребуется 2 схемы “И” и 2 схемы “ИЛИ”.

Строим структурную схему автомата



## Общая теория автоматов

Направление теории автоматов

1. Принятый уровень абстракции (абстрактный и структурный автоматы)
2. Выбор изучаемых типов автоматов

* Конечные
* Бесконечные
* Детерминированные
* Вероятностные
* Автономные
* Комбинационные
* Без выхода

1. Специфика применяемых математических методов (Алгебраическая теория автоматов)

### Классификация конечных автоматов

1. По закону функционирования

* Автоматы 1 рода (Мили)
* Автоматы 2 рода (Мура)

1. По конечности множеств X и Y (Входы и выходы)
2. По объему памяти (С и без памяти)
3. По степени абстракции

* Абстрактные
* Структурные

1. По отношению между автоматами (Если цифровой автомат А(ЦАА) < ЦАБ, то ЦАА – подавтомат А, а Б – надавтомат А)

* Подавтоматы
* Надавтоматы

1. По полноте используемых переходов

* Полностью определенные
* Частично определенные

1. Градация (По стабильности периода следования входных сигналов)
2. Талофывталоыф

* Синхронные (т.е. период следования входных сигналов постоянная величина)
* Асинхронные (период следования – непостоянная величина)

1. По вероятности переходов

* Детерминированные
* Недетерминированные

1. По нулевой мощности (при нулевой мощности множества состояний автомат называется автономным, если нулевая мощность у выходов, то безвыходный)
2. Применение

* Промышленные
* Сельскохозяйственные
* Торговые
* Учебные
* Медицинские
* Информационные

Задачи, которые решает теория автоматов

* Задача анализа – Состоит в том, чтобы заданному автомату необходимо описать его поведение в результате взаимодействия с внешней средой. Автомат считается заданным, если есть входные данные и начальное состояния.
* Задача синтеза – Заключается в построении функциональной логической схемы автомата.

1. Абстрактный синтез – переход от содержательного в формализованному
2. Структурный синтез

* Задача полноты
* Задача минимизации – Состоит в сокращении состояний автомата и минимизации структуры при реализации автомата
* Задача эквивалентных преобразований.
* Задача композиции – Состоит в создании нового автомата из существующих исходных. Задача композиции в минимизации числа состояний автоматов. Т.е. построение по произвольно заданному конечному автомату нового с наименьшим числом состояний, обладающего теми же свойствами. Так же композицией автоматов можно считать из соединения по определенной схеме (Последовательная, параллельная, с обратной связью), а задачей композиции – найти функцию перехода и выхода.
* Задача декомпозиции – состоит в том, чтобы определить, как можно получить заданный автомат Z, соединив минимальное число более простых автоматов (за счет усложнения комбинационных схем). Основная задача декомпозиции в том, чтобы найти эффективные процедуры по заданному автомату находить композицию, моделирующую исходный автомат.

## Дискретный автомат

Устройство, предназначенное для обработки дискретной информации.

Дискретные автоматы отличаются от других преобразователей информации наличием дискретного множества внутренних состояний. И возможностью скачкообразного перехода из одного состояния в другое. Переход дискретного автомата из 1 состояния в другое возможен не ранее, чем через определенный фиксированный промежуток времени T>0. Этот промежуток называется интервалом дискретности, поэтому функционирование дискретных автоматов рассматривается в дискретном времени.

Дискретное время определяется специальным генератором синхронизирующих импульсов. Благодаря этому соседние моменты времени разделены равными временными промежутками.

В противоположность синхронным дискретным автоматам в асинхронных дискретных автоматах переход из 1 состояния в другое заранее не определен и может совершаться через неравные промежутки времени. В таких автоматах дискретное время определяется не только одними моментами фактического перехода автомата из 1 состояния в другое, но и моментами, в которые эти переходы были возможны, но не произошли.

При изучении цифровых автоматов принимают следующие допущения

1. Абстрактное время принимает целые, неотрицательные значения.
2. Входные сигналы для любого цифрового автомата всегда конечны и относятся к моментам времени, когда осуществляется переход из 1 состояния в другое.
3. Выходные сигналы тоже конечны. При этом реальный физический выходной сигнал Y(t), появляется на выходе цифрового автомата всегда, после поступления на его вход соответствующего сигнала X(t), однако при переходе из 1 состояния α(t-1) к α(t) выходной сигнал Y(t) может появиться либо раньше, либо позже этого момента.

В связи с этим цифровые автоматы, в которых сигнал Y(t) на его выходе определяется значениями входного сигнала X(t) и α(t) – это называется цифровыми автоматами 1 рода или автоматами Милли.

Цифровые автоматы,в которых выходные сигналы Y(t), определяютсяX(t) или α(t) – это автоматы 2 рода или автоматы Мура.

Разница между автоматами 1 рода и 2 рода – в состояниях. У автоматов 1 рода состояние в текущем моменте, а у 2 рода – в прошлом моменте.

Абстрактный автомат – дискретный автомат, рассматриваемый только как преобразователь множества входных последовательностей X во множества выходных последовательностей Y, без учета своей внутренней структуры.

Автомат без памяти представляет собой совокупность 4 объектов. А=<Q,X,q0,β>.

Автомат с памятью (с выходным преобразователем) – задается в виде 6 объектов А=<Q,X,q0,δ,Y,λ>, где

Q – Совокупность объектов Q1(t)…Qn(t), множество состояний автомата

X – Совокупность X1(t)…Xn(t), множество входных сигналов

Y – Совокупность Y1(t)…Yn(t), множество входных символов

q0 – Начальное состояние

δ(q, x) –> (q1,xi) – Функция переходов

λ – Функция выходов

В качестве элемента памяти обычно применяется триггер.

Основной проблемой абстрактной теории автоматов является выяснение:

* Какие возможны преобразования.
* Как их можно описать.
* Каким образом математическая сущность этих преобразований связана с числом состояний (со степенью сложности).

Абстрактный автомат – дискретная модель математического управляющего устройства.

### Законы функционирования абстрактных автоматов

Закон функционирования автомата 1 уровня задается следующей формулой

α(t) = δ(α(t-1), x(t)), y(t) = λ(α(t-1), x(t)).

α(t) = δ(α(t-1), x(t)), y(t) = λ(α(t), x(t))

Смысл абстрактного автомата состоит в реализации множества слов входного алфавита от множества слов выходного алфавита. Т.е. каждое слово последовательно подается на вход и на основании законов функционирования входная последовательность вызывает появление выходной последовательности. Таким образом, относя каждому входному слову соответствующее выходное мы получаем искомое отображение, которое называется отображением индуцированным абстрактным автоматом.

Абстрактные автоматы задаются с помощью таблиц переходов и выходов, с помощью графов словесного и аналитического описания. Наиболее удобной формой считается графовая форма.

Табличное представление автомата Милли

Q – Совокупность объектов Q1(t)…Qn(t), множество состояний автомата

X – Совокупность X1(t)…Xn(t), множество входных сигналов

Y – Совокупность Y1(t)…Yn(t), множество входных символов

q0 – Начальное состояние

δ(q, x) –> (q1,xi) – Функция переходов

λ – Функция выходов

δ:QX–>Q

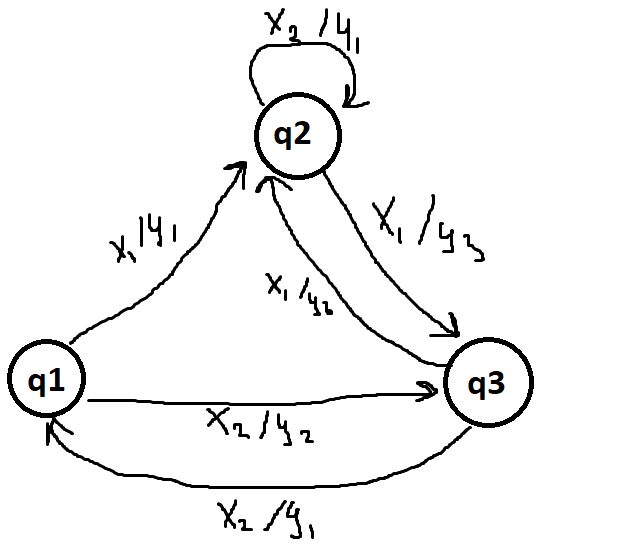
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | q1 | q2 | q3 |
| x1 | q2 | q3 | q4 |
| x2 | q3 | q2 | q1 |

δ:QX–>Y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | q1 | q2 | q3 |
| x1 | y1 | y3 | y3 |
| x2 | y2 | y1 | y1 |

Автомат имеет 1 вход и 1 выход работает в дискретном времени. На вход поступают сигналы xi(x1,x2). В каждый момент t автомат находится в состоянии q(t). Начальное состояние q0. На пересечении столбца и сторки в таблицу переходов ставится состояние qs= δ (qj,xi) в котором автомат переходит в состояние qj под действием xi. В таблице выходов соответствующий этому переходу выходной сигнал ys= λ (qj,xi). Например, если астомат находится в состоянии q2 под воздействием состояния q1 формируется выходной сигнал y3. Иногда используют совмещенную таблицу переходов и выходов, в которой на пересечении столбца qj,xi записывается пересечение qs/ys.

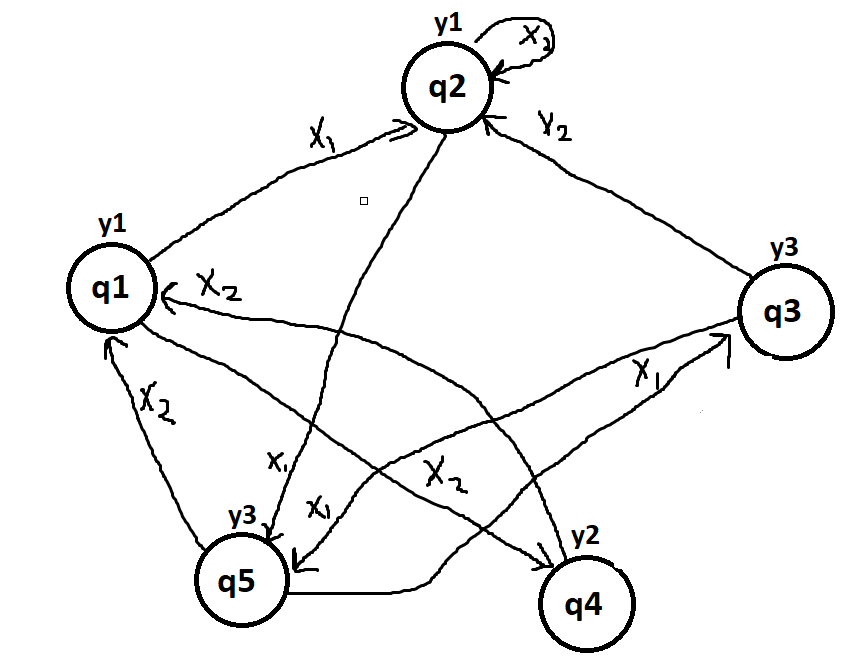
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | q1 | q2 | q3 |
| x1 | q2/y1 | q3/y3 | q2/y3 |
| x2 | q3/y1 | q2/y1 | q1/y1 |



Так как в автомате мура входной сигнал зависит только от внутреннего состояния и не зависит от сигнала, то он задается таблицей, в которой каждому ее столбцу, кроме qj приписан еще и выходной сигнал yg=λ(qj) и соответствующий этому состоянию.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | y1 | y1 | y3 | y2 | y3 |
|  | q1 | q2 | q3 | q4 | q5 |
| x1 | q2 | q5 | q5 | q3 | q3 |
| x2 | q4 | q2 | q2 | q1 | q1 |

Для частичных автоматов, у которых функции перехода(δ) или функции выхода(λ) определены не для всех пар qj на пересечении ставится прочерк.



В графе автомата не должно существовать 2 дуг с одинаковыми входными сигналами, выходящими из одной и той же вершины (условие однозначности). Иногда применяется способ задания автомата с помощью матрицы переходов и выходов, которая представляет собой таблицу с 2 входами. Строки и столбцы в такой матрице отмечены состояниями. Если существует переход qj под действием входного сигнала xi в состояние qk с выдачей выходного сигнала yi, то на пересечении столбца qk и строки qj указывается x/y.

Для автомата мура используется матрица, столбцы которой отмечены выходными сигналами yi, а на пересечении указываются только выходные сигналы xi.

Пример составления графа автомата.

Входы Выходы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | Y1 | Y2 | Y3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | - | - | - |
| 1 | 1 | 0 | - | - | - |
| 1 | 1 | 1 | - | - | - |

x1x2x3 = 0 0 0 – начальное состояние q0

x1x2x3 = 0 0 1– состояние устройства меняется на q1

x1x2x3 = 010 – новое состояние q2

x1x2x3 = 011 – переход в состояние q3

x1x2x3 = 100 – переход в начальное состояние

